מכללת נתניה- לוגיקה ותכנות לוגי- אביב התשס"ב

מורה: גיורא דולה.

מועד ב– יום ה ל אב 2002-8-8 שעה 9:00

משך המבחן 3 שעות- המבחן ללא חומר עזר למעט מחשבונים ודפים המצרפים לשאלון.

ענה על השאלות במקום המסומן בלבד. **תורדנה** נקודות על כל תשובה שלא תרשם במקום המתאים. באם הסתים המקום בדף ולא הסתימה התשובה, הפנה אותי בבקשה להמשך התשובה במחברת צין את מספר העמוד.

כל מי שישאל במבחן שאלה אודות התשובות הנכונות יענה בהצעה לכתוב את מה שהוא חושב. האחריות לכתיבת התשובה הנכונה היא על הנבחן בלבד. בבקשה לא לבוא אחר כך ולהתלונן שבגלל התשובה שלי נכתבה תשובה שגויה. בשאלות שבהן התשובה היא בטוי אלגברי פתח כמה שיותר. לצערי אין לי פנאי בזמן המבחן לומר אם הפתוח מספיק.

בזמן המבחן זכור כי שאר חבריך לשכבה רוצים לראות אותי במהלך המבחן ונסה לקצר בשאלותיך. בכל כתה שאבקר, לא אשהה יותר מ- 15 דקות.

המחברת משמשת לטיוטה בלבד ו**לא** תבדק, למעט מה שנאמר למעלה.

במבחן 10 שאלות.
שאלות 1,2,7 הן שאלות חובה.
ענה על שלש מתוך : שלש הסעיפים של שאלה 3, ו- שאלות 8,9.
לכל אחת משקל זהה של 12 נקודות.
ענה על שלש מתוך השאלות 4,5,6,10 . לכל אחת משקל זהה של 10 נקודות.

בהצלחה.

שאלה 1 (14 נקודות).

נתון מבנה U בשפת תחשיב היחסים המכיל שני יחסים חד מקומיים A ו- B ויחס דו מקומי D . לגבי כל אחד מהפסוקים הבאים קבע אם הוא אמיתי או שקרי במבנה U . תן נמוק קצר לקביעתך:

פסוקים a,b,c מתיחסים למבנה הראשון:

U=כל תלמידי המכללה, x=D(x,y) לומד יותר שנים מ- x=A(x),y תלמיד החוג למחשבים, x=B(x) תלמיד החוג למנ"עס.

a. $\forall x \exists y[(A(y) \wedge B(y)) \wedge D(x,y)]$.

b. $\forall x \forall y[D(x,y) \rightarrow (\exists(B(z) \wedge D(x,z))]$.

c. $\forall x \forall y \forall z[(D(x,y) \wedge (\neg D(y,z))) \rightarrow D(x,z)]$.

פסוקים d,e,f מתיחסים למבנה השני:

$U=R$, $D=\{(x,y)\in R^2, \neg (x-y\in Q)\}$, $A=\{x\in U, x\in Q\}$,
$B=\{x\in U, x>11\}$.

d. $\forall x \forall y \forall z[(\neg D(x,y) \wedge (\neg D(y,z))) \rightarrow (\neg D(x,z))]$.

e. $\forall x \forall y[(A(x) \wedge A(y)) \rightarrow D(x,y)]$.

f. $\forall x \forall y [(A(x) \wedge B(y)) \rightarrow D(x,y)]$.

תשובות:

א. לא נכון כי אין אף y שהוא גם סטודנט מנ"עס וגם מחשבים.

ב. נכון תמיד כי נבחר את z להיות תלמיד מנ"עס שלומד אותו מספר שנים כמו y.
ג. לא נכון עבור המקרה ש- y לומד שנה א, x שנה ב ו- z שנה ג.
ד. נכון תמיד כי $(x-y\in Q) \wedge (y-z\in Q) \to (x-y=(x-y)+(y-z)\in Q)$
ה. אף פעם לא נכון כי אם x,y רציונליים, אז גם הפרש רציונלי.
ו. לא נכון. דוגמא נגדית: $x=y=12$.

שאלה 2 (10 נק)
לפניך ארבעה פסוקים בשפת תחשיב היחסים. מצא מבנה (מודל) בשפת תחשיב היחסים אשר מקים את שלשת הפסוקים הראשונים ולא את הרביעי.

1. $\forall x \forall y[(R(x,y) \to R(y,x)]$.
2. $\forall x (\neg R(x,x))$.
3. $\exists x \exists y \exists z [(R(x,y) \wedge R(y,z)) \wedge (\neg R(x,z))]$.

---

4. $\exists x \forall y[R(x,y)]$.

תשובה:

$U=\{a,b\}, R=\{(a,b),(b,a)\}$.

שאלה 3 -כל סעיף -12 נקודות .

לפניך שלשה טעונים בשפת תחשיב היחסים. עבור כל אחד, אם הוא תקף, הבא הוכחה מלאה לתקפותו, ובאם איננו תקף, הוכח את אי תקפותו על ידי מציאת מודל מתאים.

א.

1. $\forall x \forall y \forall z \forall w\ [(G(x,y,z) \wedge G(x,y,w)) \rightarrow (z=w)]$.
2. $\exists x \forall y [G(x,y,y)]$.
3. $\exists x \forall y [G(y,x,y)]$.

$\exists x \forall y [G(x,y,y) \wedge G(y,x,y)]$

תשובה:

4. $\forall y [G(a,y,y)]$, 2, EP(x/a).
5. $\forall y [G(y,b,y)]$, 3, EP(x/b).
6. $G(a,b,b)$, 4, US(y/b).
7. $G(a,b,a)$, 5, US(y/a).
8. $G(a,b,b) \wedge G(a,b,a)$, 6,7.
9. $\forall y \forall z \forall w\ [(G(a,y,z) \wedge G(a,y,w)) \rightarrow (z=w)]$,1, US(x/a).

10. $\forall z \forall w\ [(G(a,b,z) \wedge G(a,b,w)) \rightarrow (z=w)]$,9, US(y/b).

11. $\forall w\ [(G(a,b,b) \wedge G(a,b,w)) \rightarrow (b=w)]$,10, US(z/b).

12. $[(G(a,b,b) \wedge G(a,b,a)) \rightarrow (b=a)]$,11, US(w/a).

13. $a=b$, 8,13.MP.

14. $G(a,y,y)$, 4,US(y/y).

15. $G(y,a,y)$, 5, US(y/y).

16. $G(a,y,y) \wedge G(y,a,y)$, 14,15.

17. $\forall y(G(a,y,y) \wedge G(y,a,y))$, 16,UG.

18. $\exists x \forall y[G(x,y,y) \wedge G(y,x,y)]$, 17, EG.

ב.

1. $\forall x \forall y \forall z \forall w \forall t\ [(G(x,y,z,w) \wedge G(x,y,z,t)) \rightarrow (t=w)]$.

2. $\exists x \exists y \exists z \forall w[G(x,y,w,w) \wedge G(w,y,z,w)]$.

$\exists x \exists y \forall z[G(x,y,z,z) \wedge G(z,y,x,z)]$.

תשובה:

3. $\exists y \exists z \forall w[G(a,y,w,w) \wedge G(w,y,z,w)]$, 1,EP(x/a).

4. $\exists z \forall w[G(a,b,w,w) \wedge G(w,b,z,w)]$, 3,EP(y/b).

5. $\forall w[G(a,b,w,w) \wedge G(w,b,c,w)]$, 4,EP(z/c).

6. $G(a,b,c,c) \wedge G(c,b,c,c)$, 5, US(w/c).

7. $G(a,b,c,c)$, 6, perut.

8. $G(a,b,a,a) \wedge G(a,b,c,a)$, 4, US(w/a).

9. $G(a,b,c,a)$, 8, perut.

10. $G(a,b,c,a) \wedge G(a,b,c,c)$, 7,9.

11. $\forall y \forall z \forall w \forall t\ [(G(a,y,z,w) \wedge G(a,y,z,t)) \rightarrow (t=w)]$, 1, US(x/a).

12. $\forall z \forall w \forall t\ [(G(a,b,z,w) \wedge G(a,b,z,t)) \rightarrow (t=w)]$, 11, US(y/b).

13. $\forall w \forall t\ [(G(a,b,c,w) \wedge G(a,b,c,t)) \rightarrow (t=w)]$, 12, US(z/c).

14. $\forall t\ [(G(a,b,c,a) \wedge G(a,b,c,t)) \rightarrow (t=a)]$, 13, US(w/a).

15. $(G(a,b,c,a) \wedge G(a,b,c,c)) \rightarrow (c=a)$, 14, US(t/c).

16. $c=a$, 10,15,MP.

17. $G(a,b,z,z) \wedge G(z,b,a,z)$, 5, US(w/z).

18. $\forall z(G(a,b,z,z) \wedge G(z,b,a,z))$, 17, UG.

19. $\exists y \forall z[G(a,y,z,z) \wedge G(z,y,a,z)]$, 18, EG.

20. $\exists x \exists y \forall z[G(x,y,z,z) \wedge G(z,y,x,z)]$, 19, EG.

ג.

1. $\{\forall x \forall y[D(x,y) \rightarrow D(y,x)]\} \rightarrow \{\exists x \forall y\ [D(x,y)]\}$.
2. $\{\exists x \forall y\ [D(x,y)]\} \rightarrow \{\forall x \forall y \forall z\ [(D(x,y) \wedge D(y,z)) \rightarrow D(x,z)]\}$.
3. $\exists x \exists y \exists z[D(x,y) \wedge D(y,z) \wedge (\neg D(x,z))]$.

$\exists x \exists y\ [D(x,y) \wedge (\neg D(y,x))]$.

4. $\neg (\neg (\exists x \exists y \exists z[D(x,y) \wedge D(y,z) \wedge (\neg D(x,z))].))$, 3, (9).
5. $\neg (\forall x \forall y \forall z[(\neg (D(x,y) \wedge D(y,z))) \vee (D(x,z)])$, 4, DM.
6. $\neg (\forall x \forall y \forall z[\ (D(x,y) \wedge D(y,z)) \rightarrow D(x,z)])$, 4, DM.
7. $\neg \{\exists x \forall y\ [D(x,y)]\}$2,6,MT.
8. $\neg \{\forall x \forall y\ [D(x,y) \rightarrow D(y,x)]\}$1,7,MT.
9. $\exists x \exists y \neg [\ D(x,y) \rightarrow D(y,x)]$,8,DM.
10. $\exists x \exists y\ [D(x,y) \wedge (\neg D(y,x))]$, 9,DM,(27).

שאלה 4 (10 נקודות).

כתוב יחס בשפת Prolog , sizpz(X,Y) שבו X היא רשימת קלט סדורה של מספרים שלמים, ו- Y הוא סכום האיברים המופיעים במקומות האי-זוגיים, פחות סכום האיברים במקומות הזוגיים. מותר להשתמש בכל קוד שרשמנו בכתה מבלי לפרט, אך אסור להשתמש בפונקציות ספריה. דוגמות ריצה:

```
?-sizpz([1,2,3],Y).
Y=2.
?-sizpz([1,2,3,4],Y).
Y=-2
```

תשובה:

code pf sizpz

```prolog
sizpz([],0).
sizpz([X],X).
sizpz([X,Y|Z],N):-sizpz(Z,M), N is M+X-Y.
endcode sizpz
```

שאלה 5 (10 נקודות).

כתוב יחס בשפת Prolog , zugiso(X,Y) אשר בו X ו- Y הן רשימות סדורות לא ריקות של מספרים שלמים, המצליח אם Y היא רשימת האיברים של X המופיעים במקומות הזוגיים, הסדורים בסדר עולה.
אך אסור להשתמש ,מותר להשתמש בפלקוד שעשינו בכתה מבלי לפרט פונקציית סדר. דוגמת ריצה:

```prolog
?-zugiso([5,4,3,2,1],S).
S=[2,4].
```

```
code of zugiso
zugiso([],[]).
zugiso([X],[]).
zugiso([X,Y],[Y]).
zugiso([X,Y,Z|W],M):-zugiso([Z|W],N), seder(Y,N,M).
seder(Y,[],[Y]).
seder(Y,[X|Z],[Y,X|Z]):-Y<=X.
seder(Y,[X|Z],[X|M]):-X<Y, seder([Y|Z],M).
endcode zugiso
```

שאלה 6 (10 נקודות).

נתון הקוד הבא בשפת Prolog, yafyuf(X,Y).

```
---------begin code---------
yaffe(a,b).
yaffe(b,d).
yaffe(a,c).
```

```
yaffe(c,d).
yafyuf(X,Y):-yaffe(X,Y).
yafyuf(X,Y):-yaffe(X,Z),yafyuf(Z,Y).
---------end code------------
```

ונתונה השאילתא

?-yafyuf(a,S).

תאר את בצוע התכנית במחשב, את המטרות(=שאילתות) ואת שמות המשתנים, עד קבלת ההצלחה השלישית כלפי המשתמש. לאחר ההצלחות הראשונה והשניה הנח שהדפס ;

תשובה

.loop 1, yafyuf(a,S).
.loop 1, line 5, X1=a, Y1=S
.begin loop 2, yaffe(a,Y2), Y2=Y1.
.loop 2, line 1, Y2=b.
.loop 1, Y1=b.
.print S=b.
;
loop 2, line 3, Y2=c.
.loop 1, Y1=c.
.print S=c.
;
.loop 2 ends.
.loop 1, line 6, X1=a,Y1=S, Z1=Z3.
.begin loop 3, yaffe(a,Z3).
.begin loop 4(after success of loop 3 only), yafyuf(Z3,Y4), Y4=Y1.
.loop 3, line 1, Z3=b.
.begin loop 4, yafyuf(b,Y4).
.loop 4, line 5, X4=b.
.begin loop 5, yaffe(b,Y5), Y5=Y4.
.loop 5, line 2, Y5=d.
.loop 4, Y4=d.
.loop 1, Y1=d.
.print S=d.
;
.loop 5 ends.

.loop 4, line 6, X4=b,

שאלה 7 (10 נקודות).

עבור הטעון הבא, בדק על ידי טבלת אמת באם הוא תקף. אם כן, מצא לו הוכחה פורמלית:

1. $q \to s \vee t$.
2. $(\neg v) \to (\neg s)$.
3. $v \to w$.
4. $(\neg w) \to (\neg u)$.
5. $(\neg u) \to (\neg t)$.
6. $w \to q$.

$w \leftrightarrow s$.

תשובה: השורה בטבלת האמת שבה $s=v=0$, $q=t=u=w=1$ מראה שהטעון איננו תקף.

שאלה 8

בטא את הבטוי $[a\to((\neg b)\wedge c)]$ על ידי הקשר nand $(\uparrow)$.פרט את כל החשובים.

תשובה:

$$[a\to((\neg b)\wedge c)]\equiv[(\neg a)\vee((\neg b)\wedge c)]\equiv\neg(\neg[(\neg a)\vee((\neg b)\wedge c)])$$
$$\equiv\neg[a\wedge(\neg((\neg b)\wedge c))]\equiv a\uparrow(\neg((\neg b)\wedge c))\equiv a\uparrow((\neg b)\uparrow c))\equiv a\uparrow((b\uparrow b)\uparrow c))$$

שאלה 9.

מצא את צורת ה- dnf של הבטוי הבא,x. פרט את כל השלבים.

$$x=[(a\wedge b)\to(c\wedge d)]\leftrightarrow(b\wedge d)$$

תשובה:

$$x\equiv([(a\wedge b)\to(c\wedge d)]\wedge(b\wedge d))\vee(\neg([(a\wedge b)\to(c\wedge d)])\wedge(\neg(b\wedge d))))\equiv$$
$$\equiv([(\neg(a\wedge b))\vee(c\wedge d)]\wedge(b\wedge d))\vee(\neg([(\neg(a\wedge b))\vee(c\wedge d)])\wedge(\neg(b\wedge d))))$$
$$\equiv([(\neg a)\vee(\neg b))\vee(c\wedge d)]\wedge(b\wedge d))\vee(\neg($$
$$[(\neg(a\wedge b))\vee(c\wedge d)])\wedge(\neg(b\wedge d))))\equiv[((\neg a)\wedge(b\wedge d))\vee\emptyset\vee(b\wedge c\wedge d)]$$
$$\vee[a\wedge b\wedge((\neg c)\vee(\neg d))]\wedge[(\neg b)\vee(\neg d)]\equiv[((\neg a)\wedge(b\wedge d))\vee(b\wedge c\wedge d)]$$
$$\vee[(a\wedge b\wedge((\neg c)\wedge(\neg b))\vee(a\wedge b\wedge((\neg c)\wedge(\neg d))\vee$$

$(a\wedge b\wedge((\neg d)\wedge(\neg b))\vee(a\wedge b\wedge((\neg d)\wedge(\neg d))]$

$\equiv[((\neg a)\wedge(b\wedge d))\vee(b\wedge c\wedge d)]\vee[(\emptyset)\vee(a\wedge b\wedge((\neg c)\wedge(\neg d))\vee$

$(\emptyset)\vee(a\wedge b\wedge((\neg d)\wedge(\neg d))]$

$\equiv[((\neg a)\wedge(b\wedge d))\vee(b\wedge c\wedge d)]\vee[(a\wedge b\wedge((\neg c)\wedge(\neg d))\vee(a\wedge b\wedge(\neg d))]$

ונקבל את המחוברים הבאים:

$(\neg a)\wedge b\wedge c\wedge d,\ (\neg a)\wedge b\wedge(\neg c)\wedge d,\ (\neg a)\wedge b\wedge c\wedge d,\ a\wedge b\wedge c\wedge d,$
$a\wedge b\wedge(\neg c)\wedge(\neg d),\ a\wedge b\wedge(\neg c)\wedge(\neg d),\ a\wedge b\wedge c\wedge(\neg d)$

מתוכם שני זוגות של מחוברים זהים ולכן נקבל חמישה מחוברים:

$$dnf(x)\equiv(\neg a)\wedge b\wedge c\wedge d,\ (\neg a)\wedge b\wedge(\neg c)\wedge d,\ a\wedge b\wedge c\wedge d,\ a\wedge b\wedge(\neg c)\wedge(\neg d),\ a\wedge b\wedge c\wedge(\neg d)$$

שאלה 10

האם נתן על ידי הקשר $\rightarrow$ בלבד, תוך שמוש בשני אטומים בדיוק p,q, לבטא את הקשר $p\vee q$? אם כן- בטא, ואם לא תן נמוק קצר.

תשובה:

$p\vee q\equiv(p\rightarrow q)\rightarrow q$

חוקי 1 - 1 0

לכל טענה p, 1. $0\vee p=p$ 2. $1\wedge p=p$. 3. $\neg 0=1$ 4. $\neg 1=0$
5. $0\wedge p=0$ 6. $1\vee p=1$

חוקי אידמפוטנציה

לכל טענה p, 7. $p\vee p=p$ 8. $p\wedge p=p$

חוקי שלילה

לכל טענה p מתקים
9. $\neg(\neg(p))=p$ 10. $p\vee(\neg p)=1$ 11. $p\wedge(\neg p)=0$

חוקי פלוג (דיסטריבוטיביות)

לכל טענות p, q ו- r מתקים

12. $p\wedge(q\vee r)=(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$ 13. $p\vee(q\wedge r)=(p\vee q)\wedge(p\vee r)$

חוקי קבוץ (אסוציאטיביות)

לכל טענות p, q ו- r מתקים

14. $p\vee(q\vee r)=(p\vee q)\vee r$ 15. $p\wedge(q\wedge r)=(p\wedge q)\wedge r$

חוקי חלוף (קומוטטיביות)

לכל טענות p ו- q מתקים

16. $p\vee q=q\vee p$ 17. $p\wedge q=q\wedge p$

חוקי דה- מורגן

18. $\neg(p\vee q)=(\neg p)\wedge(\neg q)$ 19. $\neg(p\wedge q)=(\neg p)\vee(\neg q)$

<u>כלל 20 – modus ponens</u> $[(p\rightarrow q)\wedge p]\rightarrow q$

<u>כלל 21 – modus tolens</u> $[(p\rightarrow q)\wedge(\neg q)]\rightarrow(\neg p)$

<u>כלל 22 טרנזיטיביות</u> $[(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow r)]\rightarrow(p\rightarrow r)$

<u>כלל 23 כללי הפרוט</u> $p\wedge q \rightarrow p$, $p\wedge q\rightarrow q$.

כלל 24 כלל הקונטרפוזיציה $(p \rightarrow q) \leftrightarrow ((\neg q) \rightarrow (\neg p))$.

כלל 25 כלל cut $[(p \vee q) \wedge (\neg p)] \rightarrow q$.

כלל 26 כלל אקספורטציה $[(p \wedge q) \rightarrow r] \leftrightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$

כלל 27 הגדרת גרירה $[(\neg p) \vee q] \leftrightarrow [p \rightarrow q]$

כלל 28 הגדרת שקילות $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$

כלל 29 הגדרת שקילות $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow [(p \wedge q) \vee ((\neg p) \wedge (\neg q))]$

כלל 30 עקרון הרזולוציה $[(a \vee b) \wedge ((\neg a) \vee c)] \rightarrow (b \vee c)$

כלל 31 $[(a \rightarrow b) \wedge (a \rightarrow c)] \rightarrow (a \rightarrow (b \wedge c))$

חוקי פרדיקטים:

$US(x/t)$ מותר להסיק מהפסוק $\forall x A(x)$ את הפסוק $A(t)$, בתנאי ש- t קבוע כלשהוא, או שהוא משתנה כך שהצבתו ב- A איננה מקלקלת אף הופעה חפשית.

$UG(x)$ מהפסוק $A(x)$ שבו כל ההופעות של x חפשיות, נובע הפסוק $\forall x A(x)$.